ETH Zürich
Institute of Theoretical Computer Science
Prof. Angelika Steger, Prof. Emo Welzl
Dr. Johannes Lengler

FS 2018

Algorithmen und Wahrscheinlichkeit
Formelsammlung

Notation

$\log n$	Logarithmus zur Basis 2.
$\ln n$	natürlicher Logarithmus.
K_n	vollständiger Graph mit n Knoten.
P_n	Pfad-Graph mit n Knoten und $n-1$ Kanten, entspricht einem Pfad *der Länge* $n-1$.
C_n	Kreis-Graph mit n Knoten und n Kanten.
Q_d	d-dimensionaler Hyperwürfel mit 2^d Knoten.
$N(v)$	Nachbarschaft von v.
A_G	Adjazenzmatrix von G.
$A \uplus B$	disjunkte Vereinigung von A und B; $G = (A \uplus B, E)$ ist ein bipartiter Graph mit partiten Mengen A und B.
$\deg(v)$	Grad von v / Anzahl Nachbarn von v.
$\delta(G)$	Minimalgrad von G.
$\Delta(G)$	Maximalgrad von G.
$\chi(G)$	chromatische Zahl von G.
$E(S,T)$	Menge der Kanten mit einem Endknoten in S und dem anderen in T, wobei $S, T \subseteq V$.
G/e	durch Kontraktion von e aus G entstehender Graph.
$\mathbb{E}[X]$	Erwartungswert von X.
$\mathrm{Var}[X]$	Varianz von X.
$\sigma[X]$	Standardabweichung von X.
f_X	Dichtefunktion von X (gegebenenfalls Randdichte).
F_X	Verteilungsfunktion von X.
$f_{X,Y}$	gemeinsame Dichte von X und Y.
$F_{X,Y}$	gemeinsame Verteilung von X und Y.
$\overline{v_0 v_1}$	Liniensegment zwischen v_0 und v_1.
$C(P)$	kleinster umschliessender Kreis von P.
$\mathrm{conv}(S)$	konvexe Hülle von S.

Wichtige Verteilungen

Name	Bezeichnung	Wertebereich	Dichte	Erwartungswert	Varianz
Bernoulli	Bernoulli(p)	$\{0,1\}$	$f_X(i) = \begin{cases} p & \text{für } i=1, \\ 1-p & \text{für } i=0. \end{cases}$	p	$p(1-p)$
Binomial	Bin(n,p)	$\{0,1,\ldots,n\}$	$f_X(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	np	$np(1-p)$
Geometrisch	Geo(p)	$\mathbb{N}$	$f_X(i) = p(1-p)^{i-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson	Po(λ)	$\mathbb{N}_0$	$f_X(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$	λ	λ

Erwartungswert

- **Definition:** $\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x]$
- **Linearität:** Für $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{E}[a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n + b] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n] + b$.
- **Summenformel:** Ist $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$, dann gilt $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i]$.
- **Multiplikativität:** Für unabhängige $X_1, \ldots, X_n$ gilt $\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$.

Varianz

- **Definition:** $\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.
- **Translation:** Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X]$.
- **Standardabweichung:** $\sigma[X] := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$.
- **Additivität:** Für unabhängige $X_1, \ldots, X_n$ gilt $\mathrm{Var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n]$.

Höhere Momente

- **k-tes Moment:** $\mathbb{E}[X^k]$.
- **k-tes zentrale Moment:** $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- **Definition:** Ist $\Pr[B] > 0$, so ist $\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$.
- **Multiplikationssatz:** Ist $\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] > 0$, so ist

$$\Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}].$$

- **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:**
Ist $\Omega = A_1 \uplus \cdots \uplus A_n$ mit $\Pr[A_1], \ldots, \Pr[A_n] > 0$, so gilt $\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]$.
- **Satz von Bayes:**
Ist $B \subseteq A_1 \uplus \cdots \uplus A_n$ mit $\Pr[A_1], \ldots, \Pr[A_n], \Pr[B] > 0$, so gilt

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

Unabhängigkeit

- **Definition:** $X_1, \ldots, X_n$ heissen genau dann unabhängig, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$ gilt: $\Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n]$.
- **Multiplikationsformel:** Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $S_i \subseteq W_{X_i}$, dann gilt: $\Pr[X_1 \in S_1, \ldots, X_n \in S_n] = \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n \in S_n]$.
- **Transformationen:** Seien $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wenn $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f(X_1), \ldots, f(X_n)$.
- **Summe:** Sind X, Y unabhängig und $Z := X + Y$, so gilt $f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)$.

Abschätzungen

- **Boolesche Ungleichung, Union Bound:** $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$.
- **Markov:** Ist $W_X \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so ist $\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$ bzw. $\Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{t}$.
- **Chebyshev:** Für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2}$ bzw. $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t \cdot \sigma[X]] \leq \frac{1}{t^2}$.
- **Chernoff:** Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und Bernoulli-verteilt, $X := \sum_{i=1}^n X_i$ und $\delta \in [0, 1]$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\Pr[X \geq (1+\delta)\mathbb{E}[X]] &\leq e^{-\frac{1}{3}\delta^2\,\mathbb{E}[X]}, \\
\Pr[X \leq (1-\delta)\mathbb{E}[X]] &\leq e^{-\frac{1}{2}\delta^2\,\mathbb{E}[X]}, \\
\Pr[X \geq t] &\leq 2^{-t} \qquad \text{für } t \geq 2e\mathbb{E}[X].
\end{aligned}$$

Andere Sätze zur Wahrscheinlichkeit

- **Siebformel:** $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_l}]$.
- **Waldsche Identität:** Sind N und X unabhängig, $W_N \subseteq \mathbb{N}$, und sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Kopien von X, dann gilt $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^N X_i] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X]$.

Fehlerreduktionen:

- **Wiederholung MC:** Eine N-fache Wiederholung mit $N = 4\varepsilon^{-2} \ln \delta^{-1}$ steigert die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Monte-Carlo-Algorithmus von $\frac{1}{2} + \varepsilon$ auf $\geq 1 - \delta$.
- **Wiederholung MC mit einseitigem Fehler:** Eine N-fache Wiederholung mit $N = \varepsilon^{-1} \ln \delta^{-1}$ steigert die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Monte-Carlo-Algorithmus mit einseitigem Fehler von ε auf $\geq 1 - \delta$.
- **Target Shooting:** Bestimmt der Target-Shooting-Algorithmus eine Menge $S \subseteq U$ mit $N \geq 3\frac{|U|}{|S|}\varepsilon^{-2} \ln(2/\delta)$ Versuchen, so ist die Ausgabe mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - \delta$ im Intervall $\left[(1-\varepsilon)\frac{|S|}{|U|}, (1+\varepsilon)\frac{|S|}{|U|}\right]$.